О.Б. БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ, к.т.н., доцент кафедри менеджменту, м. Харків, НТУ «ХПІ»

ОПТИМІЗАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЦІ

В Україні одна з найвищих у світі насиченість міст тепловими мережами [1]. Загальна протяжність теплопроводів в нашій державі становить близько 47 тис. км у двотрубному обчисленні. На балансі підприємств комунальної теплоенергетики України перебуває 20,8 тис. км теплових мереж у двотрубному обчисленні діаметром від 50 до 800 мм. На сьогоднішній день загальні втрати теплової енергії в діючих мережах систем централізованого теплопостачання становлять в середньому 30 %. а у деяких регіонах досягають 40 %. Термін безаварійної експлуатації таких теплових мереж не перевищує 10–15 років. Зазначені обставини значною мірою є причиною того, що в Україні витрати теплоти на опалення об'єктів рівної площі в 2-3 рази більші, ніж у країнах Західної Європи.

Ефективним засобом дослідження ефективності використання теплової енергії є економіко-математичне моделювання, що дозволяє подати реальну систему у вигляді математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи. Хоча економіко-математична модель і відрізняється за своєю природою від оригіналу, проте дослідження властивостей оригіналу за її допомогою зручніше, дешевше, потребує менше часу порівняно з фізичним моделюванням, яке використовується в техніці (тобто має ту ж природу, що і оригінал) [2]. Оптимізаційна модель дозволяє з декількох альтернативних варіантів вибрати найкращий варіант за будь-якою ознакою [2]. Економіко-математична модель оптимізаційної задачі містить цільову функцію, обмеження та граничні умови. Цільова функція виражає критерій оптимальності, у якості якого найчастіше приймається економічний критерій, що являє собою мінімум витрат (фінансових, енергетичних, сировинних, трудових) на реалізацію поставленої задачі.

Оптимізаційну задачу можна сформулювати в загальному вигляді [2-4]: знайти змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, що задовольняють системі нерівностей (рівнянь)

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n) \le b_i,\ i = 1, 2,\ldots, m \qquad (1)$$

і звертають в максимум (або мінімум) цільову функцію, тобто

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \to \max(\min). \qquad (2)$$

(Умови невід'ємності змінних, якщо вони є, входять в обмеження (1)).

Розглянемо основні типи економіко-математичних моделей оптимізаційних задач у теплоенергетиці.

1. Лінійні оптимізаційні задачі. Якщо критерій ефективності $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (2) являє собою лінійну функцію, а функції $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у системі обмежень (1) також лінійні, то така задача є *задачею лінійного програмування (ЗЛП)* [2, 3, 4,]. Лінійна математична модель в загальному випадку має такий вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr, \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1, 2, \ldots, k) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = k+1, k+2, \ldots, m) \end{cases}, \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0 (j = 1, 2, \ldots, l; \quad l \le n). \qquad (5)$$

ЗЛП формулюється таким чином: знайти екстремальне значення лінійної цільової функції (3) при обмеженнях (4), що задані у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей, та умов невід'ємності змінних (5).

ЗЛП можна розв'язати за допомогою графічного методу, симплекс-методу або методу штучного базису.

2. Транспортні задачі теплоенергетики. *Транспортна задача (ТЗ)* – це задача відшукання таких шляхів перевезення продукту від пунктів виробництва до пунктів споживання, при яких загальна вартість перевезень виявляється мінімальною [2-5]. Стосовно систем центрального теплопостачання (СЦТ) цю задачу можна сформулювати таким чином [5]. Є m джерел теплоти та n її споживачів. Задано теплові потужності A_i кожного джерела теплоти і потреби B_j кожного споживача, а також питомі приведені витрати (або експлуатаційні витрати) на транспортування одиниці теплової потужності від i-го джерела до j-го споживача c_{ij}. Потрібно визначити потоки теплової потужності x_{ij} від джерел до споживачів, що забезпечують мінімум сумарних приведених витрат (або експлуатаційних витрат) в СЦТ,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{6}$$

за умов повного задоволення потреб споживачів теплової потужності від джерел теплоти

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j , \tag{7}$$

повного використання потужності кожного джерела теплоти для забезпечення споживачів

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i , \tag{8}$$

невід’ємності потоків теплової потужності від джерел до споживачів

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Вирази (6)–(9) являють собою математичну модель ТЗ. Для її розв’язання застосовують метод потенціалів.

Розглянемо просту модель ЗЛП транспортного типу – *задачу про призначення* [5] для оптимального розподілу основного устаткування джерел теплоти $\left(i = \overline{1,n}\right)$ по об'єктах їх будівництва $\left(j = \overline{1,n}\right)$ вигляду

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_{ij} \to \min \tag{10}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}, \tag{12}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}, \tag{13}$$

де B_{ij} – приведені витрати на споруду і експлуатацію i-ї одиниці основного устаткування (наприклад, казана або турбіни) на j-му об'єкті; x_{ij} – булева змінна, що дорівнює 1 при установці i-ї одиниці основного устаткування на j-му об'єкті і 0 – в противному випадку (ця вимога в задачі про призначення виконується автоматично).

Умови (11) означають, що кожна i-а одиниця основного устаткування, яка намічена до виробництва, має бути використана. Умови (12) означають, що кожен j-й об'єкт будівництва СЦТ має бути забезпечений основним устаткуванням джерел теплоти. Для розв’язання задачі про призначення можуть бути використані ефективні алгоритми розв’язування транспортної задачі, наприклад метод потенціалів, угорський метод і ін.

3. Нелінійні оптимізаційні задачі. Якщо критерій ефективності (2) й (або) система обмежень (1) задаються нелінійними функціями, то маємо *задачу нелінійного програмування* [2-4].

4. Оптимізаційні задачі цілочислового програмування (ЗЦП). За змістом значної частини економічних задач, що відносяться до ЗЛП, компоненти розв’язку повинні виражатися в цілих числах, тобто бути цілочисловими [2-4]. Математична модель ЗЦП аналогічна лінійним та нелінійним моделям і містить цільову функцію, систему обмежень та граничні умови. Однак система обмежень у цих задачах доповнюється обмеженнями типу:

$$x_k \text{ – ціле}, \; k = 1, 2, \ldots, l, \tag{14}$$

де l – кількість цілочислових змінних, $l \le n$, n – загальна кількість змінних.

4.1. Двійкові змінні. Окремим випадком цілочислових задач є задачі, у яких шукані змінні можуть приймати не будь-які цілі значення, а тільки одне із двох: або 0, або 1. Такі змінні називаються двійковими або булевими [2-4].

Розповсюдженими задачами із двійковими змінними є задачі вибору оптимального рішення (варіанта) з певного числа заданих рішень (варіантів). Якщо варіант входить в оптимальне рішення, то двійкова змінна, що відповідає цьому варіанту, дорівнює 1. Якщо варіант не входить в оптимальне рішення, то відповідна двійкова змінна дорівнює 0. Наприклад, якщо лінія теплопередачі входить в оптимальну теплову мережу, то двійкова змінна, що відповідає цій лінії, дорівнює 1: якщо лінія теплопередачі не входить в оптимальну теплову мережу, то відповідна двійкова змінна дорівнює 0. На відміну від традиційних змінних x_i, двійкові змінні будемо позначати δ_i, де i = 1, 2, ... n. Застосування двійкових змінних дозволяє накладати на розв'язувану задачу цілий ряд логічних умов типу «якщо ..., то ...».

Якщо в оптимальне рішення повинен входити один із двох (i й j) варіантів, то сума змінних $\delta_i + \delta_j = 1$. Якщо в оптимальне рішення повинні входити й i-й, і j-й варіанти, то сума змінних $\delta_i + \delta_j = 2$. Якщо в оптимальне рішення може входити або не входити, кожний із двох (i й j) варіантів, то сума змінних $\delta_i + \delta_j \geq 0$. Якщо при вході (не вході) в оптимальне рішення i-го варіанта в це рішення повинен увійти (не ввійти) і j-й варіант, то $\delta_i = \delta_j$.

Аналогічні умови можна записати для трьох і більше варіантів. Якщо з n можливих варіантів в оптимальне рішення повинні входити тільки m варіантів ($m < n$), то $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = m$.

Очевидно, що кількість логічних умов типу «якщо ... , то ...» не обмежено.

4.2. Дискретні змінні. У ряді практичних оптимізаційних задач заздалегідь відомий набір припустимих рішень, з яких потрібно вибрати оптимальне рішення [2-4]. Наприклад, один тепловий пункт заданої потужності Q_k можна розмістити у вузлах 1, 2, ... n системи теплопостачання. Потрібно вибрати оптимальний вузол розміщення теплового пункту відповідному обраному критерію. В ряді інших задач шукані змінні можуть приймати не будь-які, а тільки певні значення, з яких потрібно вибрати значення змінних, що відповідають оптимальному рішенню. Наприклад, у заданому вузлі системи теплопостачання потрібно встановити тепловий пункт, потужність якого може дорівнювати значенням Q_{k1}, Q_{k2}, … Q_{kn}. Із цього ряду потрібно вибрати оптимальне значення потужності теплового пункту, яке відповідає обраному критерію.

Зазначені задачі належать до задач вибору варіантів із числа заданих і розв'язуються методами дискретного програмування. У цих методах поряд із традиційними змінними використовуються двійкові змінні, можливості яких розглянуті в п. 4.1. Математична модель задач дискретного програмування аналогічна розглянутим вище моделям і містить цільову функцію, систему обмежень і граничні умови. Залежності між змінними в цільовій функції й системі обмежень можуть бути як лінійними, так і нелінійними. Значення дискретних змінних, що задаються, можуть бути будь-якими, у тому числі й цілочисловими.

Цільова функція містить у собі й дискретні $x_i, x_2, \ldots, x_n$ і двійкові змінні $\delta_i, \delta_2, \ldots, \delta_n$

$$Z(x_i, x_2, \ldots, x_n, \delta_i, \delta_2, \ldots, \delta_n) \rightarrow extr. \tag{15}$$

У систему обмежень входять і дискретні, і двійкові змінні

$$\begin{cases} f_1(x_i, x_2, \ldots, x_n, \delta_i, \delta_2, \ldots, \delta_n, b_1) = 0, \\ f_2(x_i, x_2, \ldots, x_n, \delta_i, \delta_2, \ldots, \delta_n, b_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_i, x_2, \ldots, x_n, \delta_i, \delta_2, \ldots, \delta_n, b_m) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

До цієї системи додаються обмеження вигляду

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = k, \tag{17}$$

$$\delta_i \text{ – двійкові, } i = 1, 2, \ldots n.$$

Граничні умови, як такі, не записуємо, оскільки можливі значення дискретних змінних є заданими, а значення двійкових змінних можуть бути тільки 0 або 1.

Для розв'язання ЗЦП використовують такі методи як метод відтинання та метод гілок і меж.

5. Задачі динамічного програмування. *Динамічне програмування* – це особливий метод оптимізації, що призначений для операцій, в яких процес прийняття рішень може бути розбитим на окремі етапи (кроки) [2, 3, 5, 6]. Такі операції називаються багатоетапними. Використання методу динамічного програмування доцільне до операцій, що мають дуже багато етапів розв'язування. Ідея динамічного програмування полягає в розбитті складної задачі на ряд простих з наступним розв'язуванням послідовності цих задач. Для того, щоб збагнути, які саме задачі можна розглядати як багатоетапні, розглянемо *задачу розвитку теплової мережі* [2, 3, 6]. Сутність її полягає в тому, що для деякого регіону у відповідності до плану його розвитку вводяться в дію нові виробництва. Для подачі до них теплової енергії розширюються діючі теплові мережі (наприклад, будуються нові лінії теплопередач та теплові пункти). Відомі навантаження, що вводяться в дію на кожному році розвитку регіону, їх територіальне місцезнаходження. Потрібно побудувати теплові мережі таким чином, щоб сумарні втрати на це були мінімальними. Якщо на першому році розвитку мережі прийняти рішення, якому відповідають мінімальні витрати, то на другому році розвитку це рішення може виявитися далеко не найкращим або навіть не допустимим. Іноді доцільно йти на додаткові витрати, які виявляться виправданими на наступних періодах розвитку мережі Наприклад, передбачити можливість встановлення більш потужних теплових пунктів Тобто, в такій задачі слід передбачати деякі технічні рішення з врахуванням перспективи росту навантажень.

В детальному вигляді задача, до розв’язання якої можна застосувати метод динамічного програмування, полягає в тому, що:

• дана система (обмежена множина взаємопов'язаних елементів), стан якої характеризується вектором параметрів стану – W;

• її необхідно перевести з вихідного стану U_0, який характеризується вектором W_0, в кінцевий U_n, що характеризується вектором W_n;

• процес переходу можна розбити на послідовність n етапів, а стан системи за результатами кожного етапу позначимо як U_1, U_2, …, U_n;

• перехід системи з одного стану до іншого відбувається внаслідок реалізації відповідних рішень X_1, X_2,..., X_n, де X_1, X_2,..., X_n - вектор змінних, відповідно, першого, другого та n -го етапів розв'язування задачі;

• реалізація вектора рішень X_1 переводить систему зі стану U_0 в стан U_1, вектора X_2 – із стану U_1 в стан U_2 і т.д.;

• в цілому переведення системи зі стану U_0 в стан U_n відбувається в результаті реалізації вектора рішень:

$$X^{\mathrm{T}} = (X_1\, X_2\, \ldots X_n).$$

У задачах динамічного програмування вважають, що стан системи в кінці i-го етапу залежить лише від стану системи для (i –1)-го етапу, який характеризується вектором $W_{i\text{-}1}$ та вектора X_i. Така властивість системи називається *відсутністю післядії*. Змінюючи значення компонент вектора X, можна отримати ефективність процесу переходу зі стану U_0 в стан U_n, яка повинна бути кількісним показником – $f(W_0, X)$, який бажано максимізувати чи мінімізувати. Показник ефективності i-го етапу, що залежить від $W_{i\text{-}1}$ та вектора X_i, що вибраний на даному етапі, позначимо як $f_i(W_{i\text{-}1}, X_i)$. В задачі динамічного програмування залежність $f(W_0, X)$ може бути адитивною, тобто

$$f(W_0, X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(W_{i-1}, X_i). \tag{18}$$

Задачу динамічного програмування можна сформулювати таким чином: визначити сукупність допустимих рішень – X_1, X_2,..., X_n, що переводять систему з початкового стану U_0 в кінцевий U_n, мінімізуючи (максимізуючи) показник ефективності f.

6. Оптимізаційні задачі при випадковій вихідній інформації. Досить часто вихідна інформація або її частина являють собою випадкові величини або випадкові функції [2-4]. Зокрема, потужності навантажень в системі теплопостачання, що проектується, можна вважати випадковими величинами, а зміни в часі напруг у вузлах існуючої системи теплопостачання – випадковими функціями. Для розв’язання оптимізаційних задач при випадковій вихідній інформації використовують *методи стохастичного програмування*.

Якщо коефіцієнти c_i цільової функції є випадковими величинами, то шукають екстремальне значення математичного очікування цільової функції:

$$M[Z] \to extr. \tag{19}$$

Якщо коефіцієнти системи обмежень є випадковими величинами, то для кожного j-го обмеження задається значення ймовірності $P_{\text{зад } j}$, з яким повинно виконуватися це обмеження. Імовірність виконання кожного j-го обмеження повинна бути не менше заданої:

$$P\left(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j\right) \ge P_{\text{зад } j},\ j = \overline{1,m}. \tag{20}$$

Граничні умови в практичних оптимізаційних задачах, як правило, не містять випадкових величин і записуються без змін:

$$d_i \le x_i \le D_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

7. Оптимізаційні задачі при недетермінованій вихідній інформації

У реальних оптимізаційних задачах часто доводиться шукати розв'язок в умовах невизначеності. Основною причиною невизначеності є недолік вихідної інформації. В теплоенергетиці прикладом невизначеної (недетермінованої) інформації може служити перспективне зростання потужностей в теплоенергетичній системі, що розвивається.

Якщо вибрано представницьку множину умов створення і функціонування теплоенергетичної установки (B_1, …, B_d, …, B_D), то далі за допомогою математичної моделі енергоустановки і детермінованих алгоритмів оптимізації можна знайти для кожної умови свій оптимальний розв'язок X_k [7]. Набуті в результаті розрахунків значення приведених витрат по енергоустановці $З_{kd}$ зручно звести в *матрицю можливих розв'язків* (табл. 1). Стовпці цієї матриці відповідають відібраним сукупностям початкових даних B_d, а рядки – можливим сукупностям параметрів X_k, що оптимізуються. По головній діагоналі матриці розташовуються мінімальні значення приведених витрат ($З_{11}$, …, $З_{kd}$, …, $З_{KD}$) для кожної сукупності значень початкових даних.

Таблиця 1 – Матриця можливих розв’язків

Оптимальний розв’язок	Варіант вихідних умов					
	B_1	B_2	…	B_d	…	B_D
X_1	$З_{11}$	$З_{12}$	…	$З_{1d}$	…	$З_{1D}$
X_2	$З_{21}$	$З_{22}$	…	$З_{2d}$	…	$З_{2D}$
…	…	…	…	…	…	…
X_k	$З_{k1}$	$З_{k2}$	…	$З_{kd}$	…	$З_{kD}$
…	…	…	…	…	…	…
X_K	$З_{K1}$	$З_{K2}$	…	$З_{Kd}$	…	$З_{KD}$

Таким чином, проведено аналіз основних типів економіко-математичних моделей оптимізаційних задач у теплоенергетиці, а саме: 1) задач лінійного програмування; 2) транспортних задач; 3) задач нелінійного програмування; 4) задач цілочислового програмування; 5) задач динамічного програмування; 6) оптимізаційних задач при випадковій вихідній інформації; 7) оптимізаційних задач при недетермінованій вихідній інформації.

Список літератури: **1.** *Білоцерківський О.Б.* Аналіз сучасного стану теплопостачання у житлово-комунальному господарстві України // Тези доповідей XXII Міжнар. наук.-практ. конф. „Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я”, 21-23 травня 2014 р. Харків: у 4 ч. – Ч. IV. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2014. – С. 130. **2.** Удосконалення економічної оцінки енергозаощадження : монографія / за заг. ред. *О.М. Гаврися*. – Х.: «Цифрова типографія №1», 2012. – 175 с. **3.** Інформаційні складові сучасних підходів до управління економікою : міжнародна колективна типографія / Під заг. ред. *Л.М. Савчук.* – Донецьк: Ландон-ХХІ, 2013. – 414 с. **4.** *Костин В.Н.* Оптимизационные задачи электроэнергетики : учеб. пособие / *В.Н. Костин.* – СПб.: СЗТУ, 2003. – 120 с. **5.** *Юфа А.И.* Комплексная оптимизация теплоснабжения / *А.И. Юфа, Д.Р. Носулько*. – К.: Тэхника, 1988. – 135 с. **6.** *Милосердов В.О.* Алгоритмізація оптимізаційних задач енергетики. Навч. посіб. / *В.О. Милосердов, Л.Б. Терешкевич.* – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 122 с. **7.** *Попырин Л.С.* Математическое моделирование и оптимизация теплоэнергетических установок / *Л.С. Попырин*. – М.: Энергия, 1978. – 416 с.